Aufgabe 1
Sei $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche mit erster Fundamentalform g. Zeigen Sie: Sind für alle Geodätischen $\gamma \in C^2(I, U)$ bzgl. g die Kurven $c = F \circ \gamma$ ebene Kurven, d.h. die Kurven c liegen in einer 2-dimensionalen Ebene, so liegt $F(U)$ in einer Ebene oder auf einer Sphäre.
Hinweis: Zeigen Sie, dass jeder Punkt $x \in U$ ist ein Nabelpunkt von F ist und verwenden Sie Aufgabe 3, Serie 7.

Aufgabe 2
Sei $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche mit erster Fundamentalform g, so dass $F(U) \subset \mathbb{S}^2$. Zeigen Sie: Ist $\gamma \in C^2(I, U)$ eine nichtkonstante Geodätische bzgl. g, so liegt die Kurve $c = F \circ \gamma$ auf einem Großkreis, genauer: Seien $t_1, t_2 \in I$ mit $c(t_1) \neq c(t_2)$ (solche Punkte existieren, da γ nicht konstant) und sei L die durch $0, c(t_1), c(t_2)$ aufgespannte Ebene, so gilt

$$c(I) \subset L \cap \mathbb{S}^2.$$

Aufgabe 3 (*Geodätisches Dreieck*)
Sei $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche mit erster Fundamentalform g und $T \subset U$ ein geodätisches Dreieck, d.h. die Seiten von T sind Geodätische bzgl. g. Seien θ_i, $i = 1, 2, 3$, die Außenwinkel von T und $\phi_i = \pi - \theta_i$, $i = 1, 2, 3$, die Innenwinkel. Zeigen Sie (wobei K die Gauss-Krümmung bezeichnet):

$$(i) \quad \sum_{i=1}^{3} \phi_i = \pi \quad \text{falls } K = 0,$$

$$(ii) \quad \sum_{i=1}^{3} \phi_i > \pi \quad \text{falls } K > 0,$$

$$(iii) \quad \sum_{i=1}^{3} \phi_i < \pi \quad \text{falls } K < 0.$$

Aufgabe 4
Sei $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche mit erster Fundamentalform g und Gauss-Krümmung $K \leq 0$. Zeigen Sie: Es existiert keine einfach geschlossene Geodätische $\gamma \in C^2(I, U)$ bzgl. g, welche ein einfach zusammenhängendes Gebiet berandet.